

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ОПОРНОГО КОНСПЕКТА

1. Конспект содержит узловые принципиальные положения краткого курса, представленные в иллюстрированном виде.

2. Конспект нацелен на экономию лекционного времени, которое растрачивается в значительной мере лектором и студентами на записи и чертежи на доске и в тетрадях. При этом внимание студентов раздваивается, надо успеть услышать и записать. Возможно, что на понимание не хватает времени. Сэкономленное время лектор может использовать на дополнительные пояснения и общение со студентами в вопросах и ответах. А студенты могут сделать свои личные записи-пояснения на левой чистой странице напротив чертежей базового конспекта. При этом конспект приобретает индивидуальный личностный характер на основе соблюдения принципиальных базовых данных курса теории упругости.

3. Контрольные вопросы, которые предусмотрены в базовом конспекте, помогут студенту проконтролировать полученные знания, а в целом, конспект будет подспорьем для подготовки к зачету и экзамену.

Базовый конспект не заменяет учебники, но явится полезным дополнением, в котором кратко и визуально высветлены законы данной науки и принципиальные положения. Обращено внимание студентов на основные понятия, используемые в курсе теории упругости, на связь со смежными дисциплинами (сопротивлением материалов, строительной механикой и конструкциями), а также на предварительные знания, необходимые для изучения курса.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- НАПРЯЖЕНИЯ
- ПЕРЕМЕЩЕНИЕ
- ДЕФОРМАЦИЯ
- НЕРАЗРЫВНОСТЬ ДЕФОРМАЦИИ
- УПРУГОСТЬ
 - ЛИНЕЙНАЯ
 - НЕЛИНЕЙНАЯ
- ПЛАСТИЧНОСТЬ
 - ОСТАТОЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ
- ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТУ
 - ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ
 - ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ
- ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ТУ
- ТОНКАЯ ПЛИТА (ПЛАСТИНКА) (ОТЛИЧИЕ ОТ БАЛКИ)
- ОБОЛОЧКА (ТОЛСТАЯ, ТОНКАЯ, МЕМБРАНА)
- ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОНСТРУКЦИЯ
- ПЛОСКАЯ (БАЛОЧНАЯ) КОНСТРУКЦИЯ отличие в работе (НДС)
- ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ПЛАСТИНКИ
- ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА
- УСЛОВИЯ СВЕДЕНИЯ 3-Х МЕРНОЙ ЗАДАЧИ К 2-Х МЕРНОЙ
И 2-Х МЕРНОЙ К ОДНОМЕРНОЙ
- УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ
 - УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО
 - УПРУГАЯ ПОЛУПЛОСКОСТЬ
 - КОЭФФИЦИЕНТ ПОСТЕЛИ (КОЭФФИЦИЕНТ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ)

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗНАНИЯ
(ЧТО НАДО ПОВТОРИТЬ ДО ИЗУЧЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ)

ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

- Гипотезы, цели курса
- Закон Гука
- Лабораторные работы по определению E , ν , μ
- Основные понятия (напряжение, главные напряжения, деформация и др.)
- Простейшие виды деформирования
 - сжатие-растяжение
 - внецентренное сжатие
 - сдвиг, кручение
 - поперечный изгиб балок
 - продольный изгиб стержней
- Устойчивое и неустойчивое деформирование (потеря устойчивости)

ПО ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

- Гипотезы, цель курса
- Уравнения равновесия, различные формы составления условий равновесия

ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

- Решения систем алгебраических уравнений
- Матрицы
- Дифференцирование
- Обыкновенные дифференциальные уравнения
- Дифференциальные уравнения в частных производных
- Численные методы решения дифференциальных уравнений (метод конечных разностей, метод конечных элементов)
- Ряды
- Разложение функций в ряд Тейлора

1

КРАС ГАСА

кафедра СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ
и УПРАВЛЕНИЯ КОНСТРУКЦИЯМИ

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ и ПЛАСТИЧНОСТИ

ОПОРНЫЙ
КОНСПЕКТ

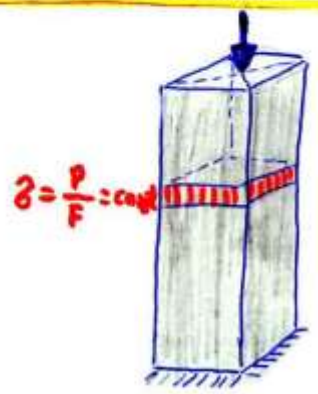
КРАТКОГО КУРСА

ЛЕКТОР

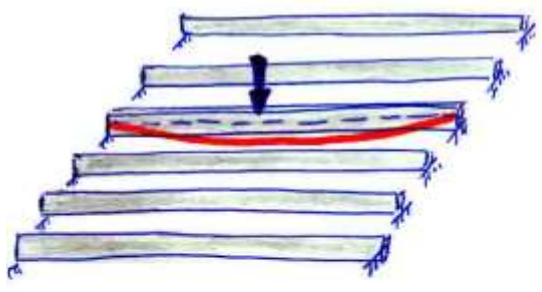
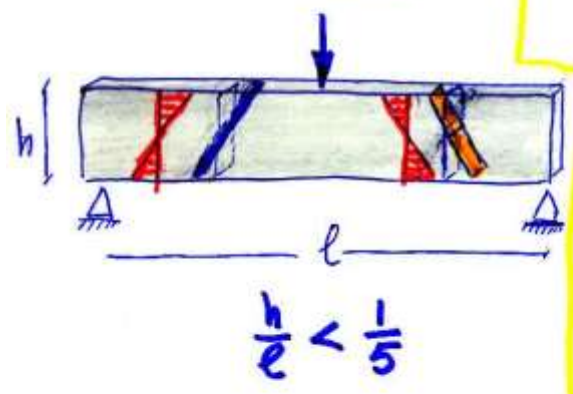
проф. АБОВСКИЙ Н.П.

КРАСНОЯРСК

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

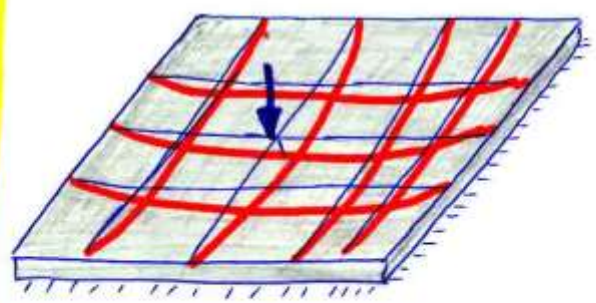
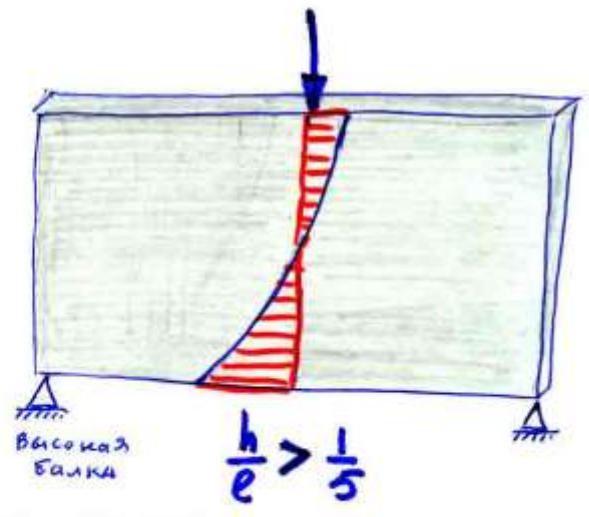
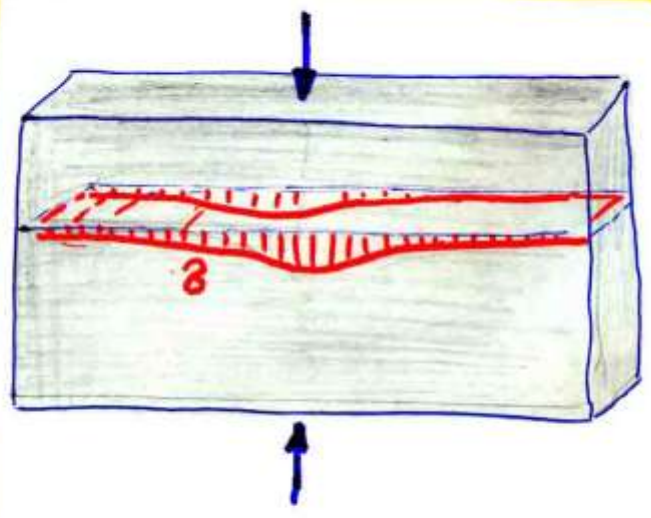


ГИПОТЕЗЫ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

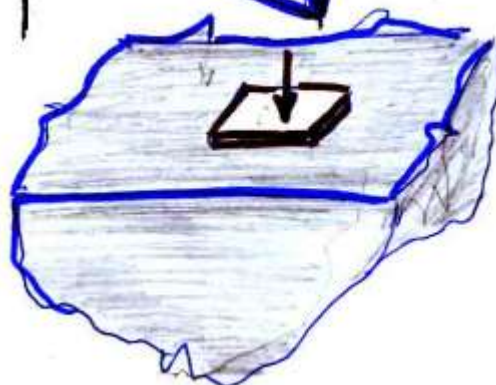
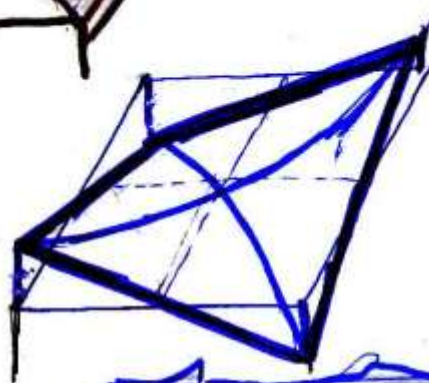
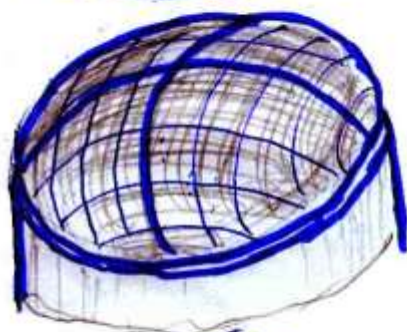
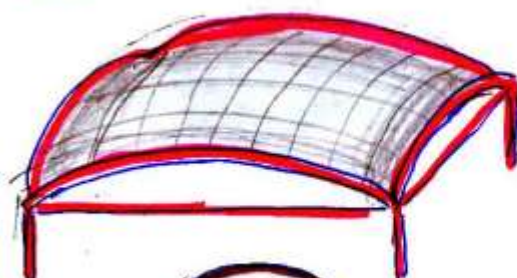
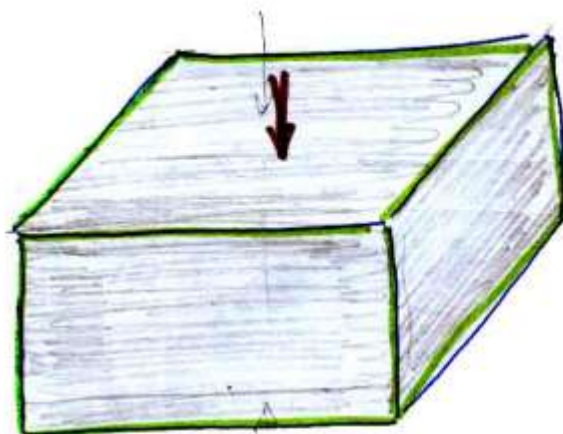
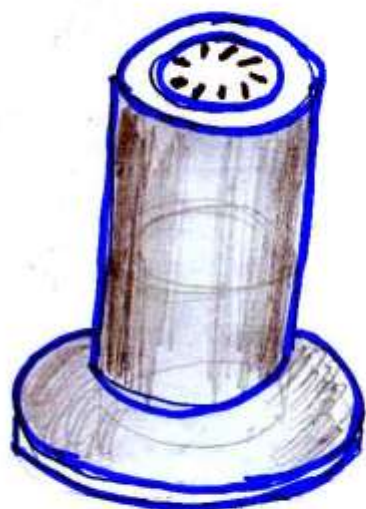


плоское несвязанное деформирование отдельных балок

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ



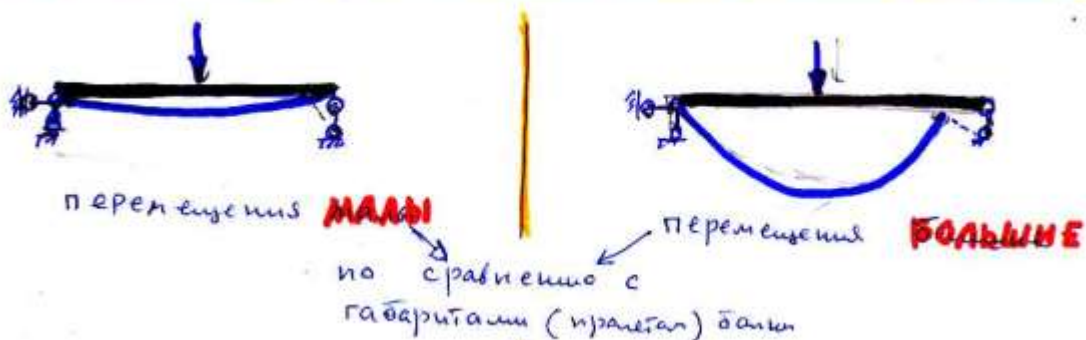
пространственное упрочивание плиты



ЗАДАЧА ТУ:
определение НДС
ТЕЛ ЛЮБОЙ ФОРМЫ
ПРИ ЛЮБЫХ НАГРУЗКАХ

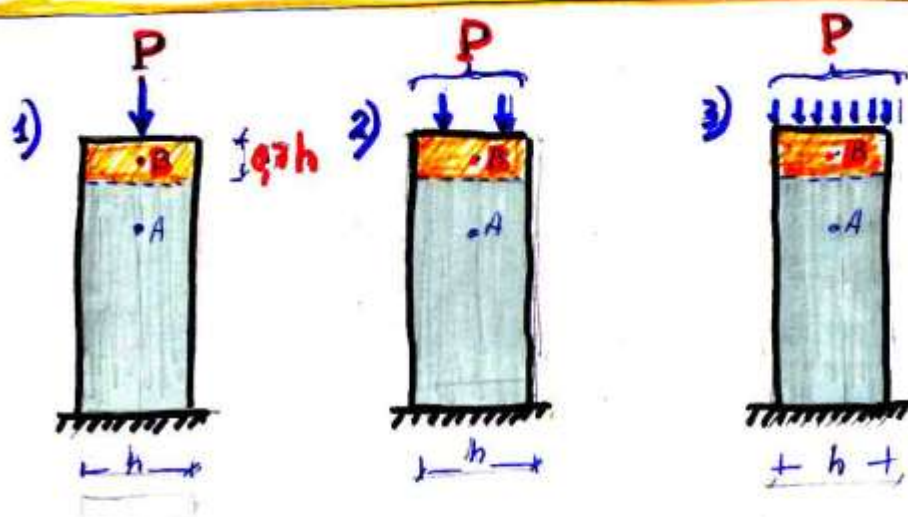
ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

- **СПЛОШНОСТЬ**
- **УПРУГОСТЬ**
 - идеальная
 - изотропия
 - анизотропия
 - ортотропия



линейная теория

нелинейная теория

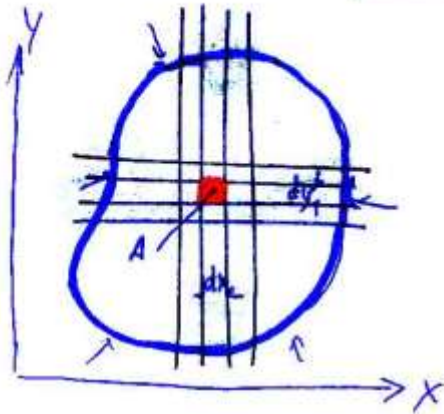


$$(\sigma_A)_1 = (\sigma_A)_2 = (\sigma_A)_3$$

$$(\sigma_B)_1 \neq (\sigma_B)_2 \neq (\sigma_B)_3$$

Принцип Сен-Венана

МЕТОД СЕЧЕНИЙ

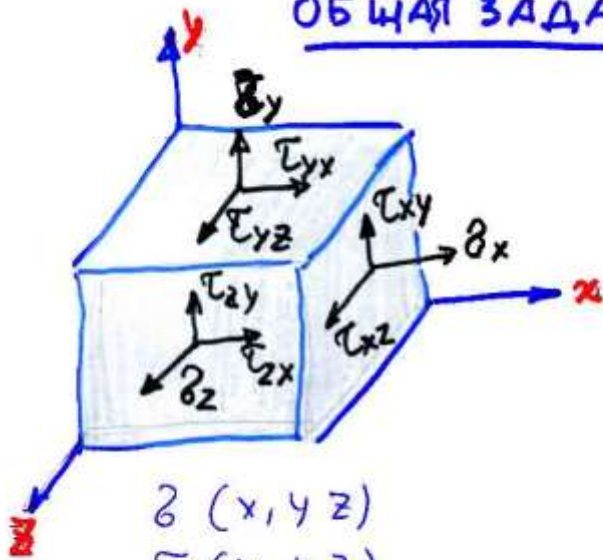


$$A(x, y)$$

$$\sigma(x, y)$$

$$\tau(x, y)$$

ОБЩАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

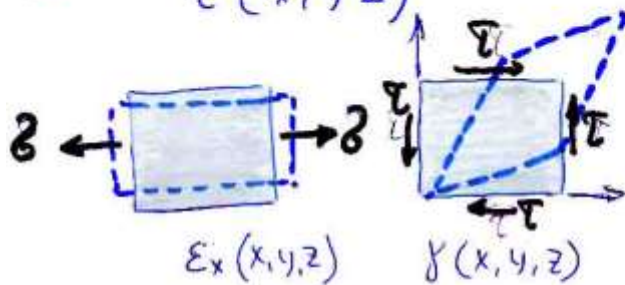


$$\sigma(x, y, z)$$

$$\tau(x, y, z)$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ

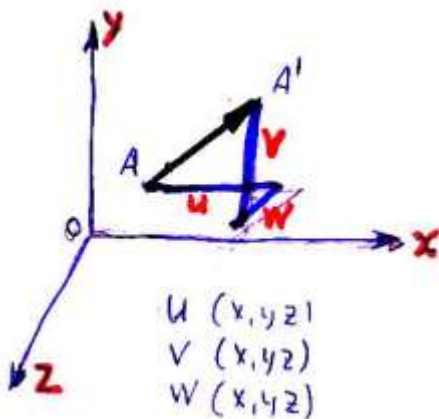


$$\epsilon_x(x, y, z)$$

$$\gamma(x, y, z)$$

$$\begin{vmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma & \epsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma & \gamma & \epsilon_z \end{vmatrix}$$

ТЕНЗОР ДЕФОРМАЦИЙ



$$u(x, y, z)$$

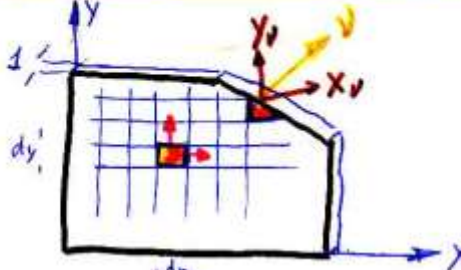
$$v(x, y, z)$$

$$w(x, y, z)$$

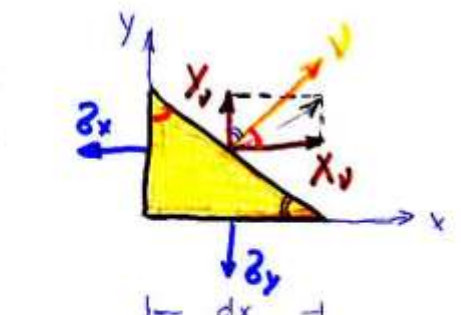
$$\begin{matrix} x \rightarrow \\ y \rightarrow \\ z \rightarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix}$$

ТЕНЗОР ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

СТАТИЧЕСКАЯ СТОРОНА ЗАДАЧИ ДИФ. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ НАВЬЕ

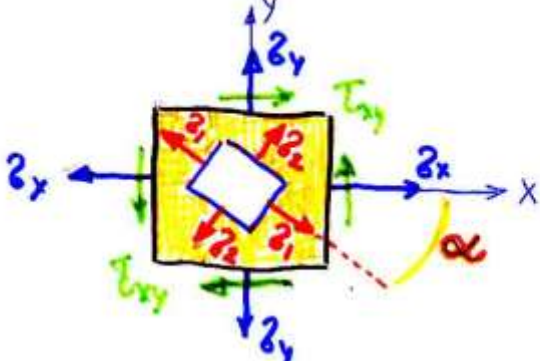


$\Sigma X = 0$ $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{X} = 0$ 1
 $\Sigma Y = 0$ $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \bar{Y} = 0$ 2
 $\Sigma M_o = 0$ $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 3



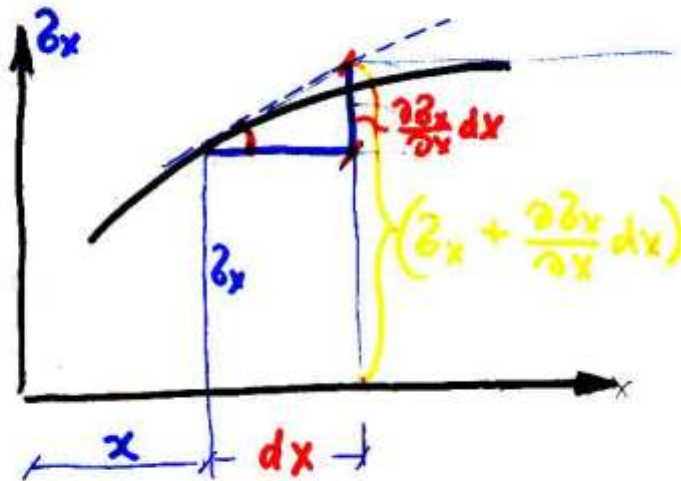
$X_v = \sigma_x l + \tau_{xy} n$
 $Y_v = \sigma_y n + \tau_{yx} l$
 $l = \cos(x, v)$
 $n = \cos(y, v)$

ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ



$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right]$
 $\tan 2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$; $\tan \alpha = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1}$

На основе гипотезы сплошности
и разложения функции в ряд Тейлора



$$z(x)$$

$$z(x+dx) = z_x + \frac{\partial z_x}{\partial x} dx$$

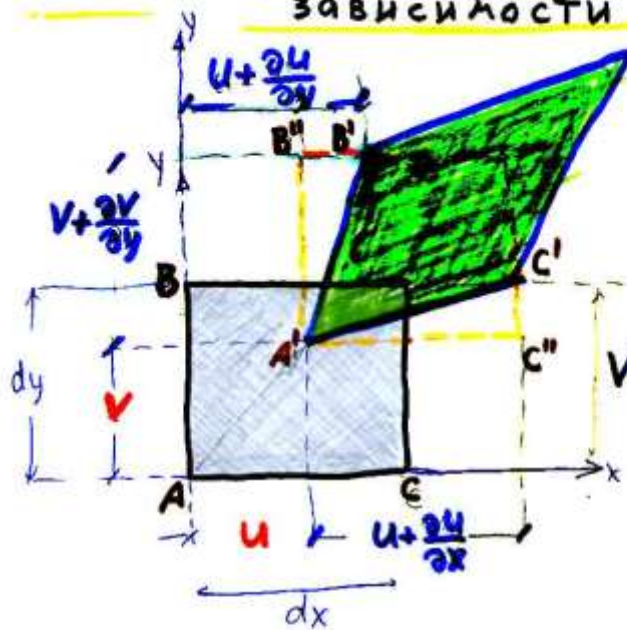
Функция получает приращение по
изменяемой координате

Например

$$\Gamma_{xy}(x, y)$$

$$\Gamma_{xy}(x, y+dy) = \Gamma_{xy}(x, y) + \frac{\partial \Gamma_{xy}(x, y)}{\partial y} dy$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТОРОНА ЗАДАЧИ ЗАВИСИМОСТИ КОШИ



$$\epsilon_x = \frac{A'C' - AC}{AC} =$$

$$\epsilon_y = \frac{A'B' - AB}{AB}$$

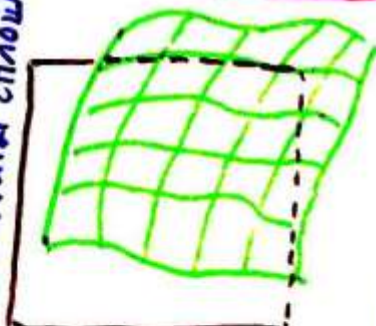
$$\gamma_{xy} \approx \frac{C'C''}{A'C''} + \frac{B'B''}{A'B''}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

Уравнение неразрывности деформаций
(сплошности)

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Физическая
картина сплошности



РАЗРЫВЫ
деформации



закон Гука

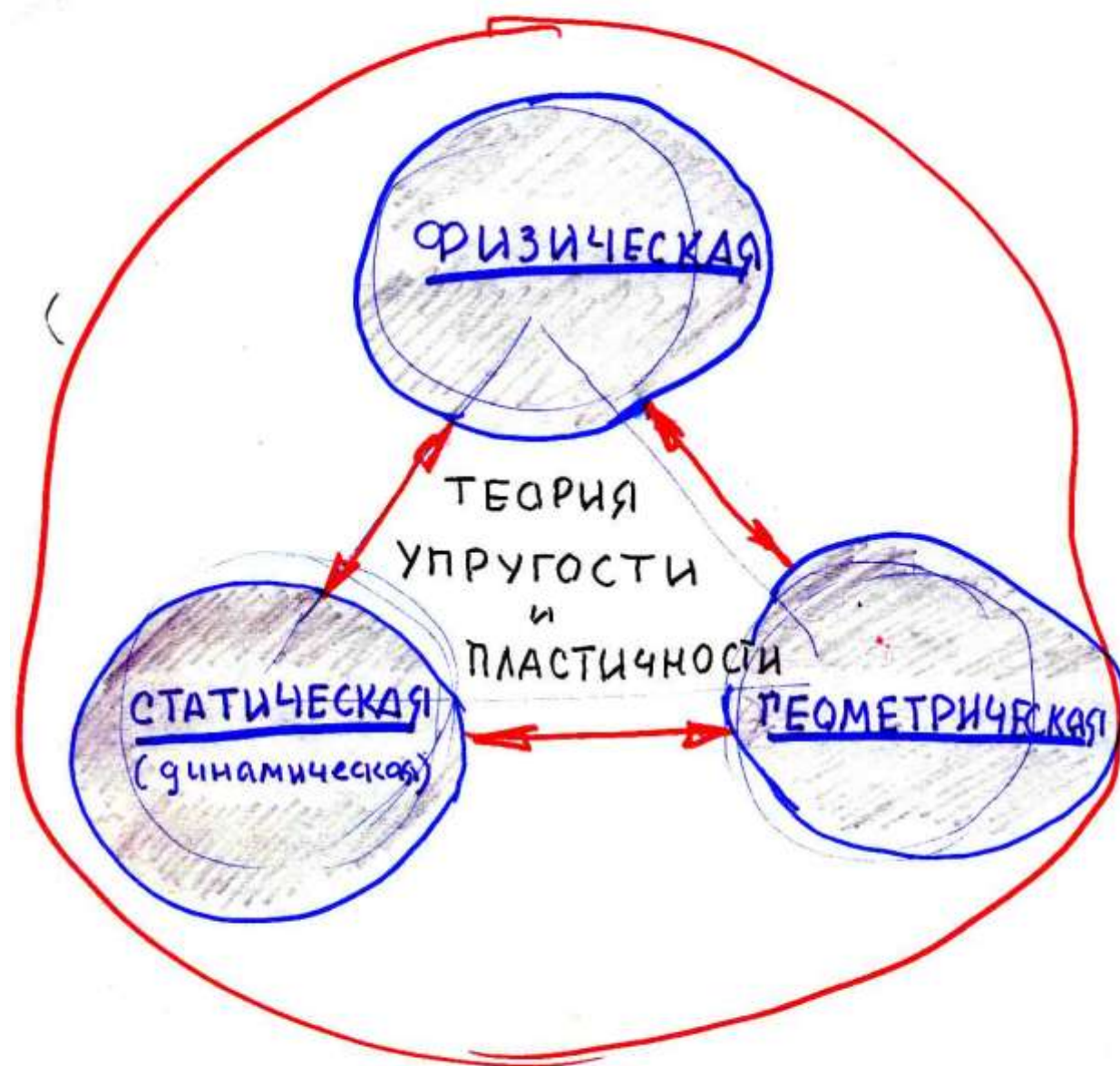
+ уравнения равновесия (частично)

$$\nabla^2 (\partial_x + \partial_y) = 0$$

УСЛОВИЕ МОРИСА ЛЕВИ

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

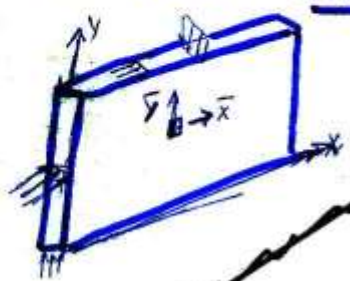
← оператор
ЛАПЛАСА
второго порядка



ТРИ СТОРОНЫ ЗАДАЧИ

ТРИ СТОРОНЫ ЗАДАЧИ

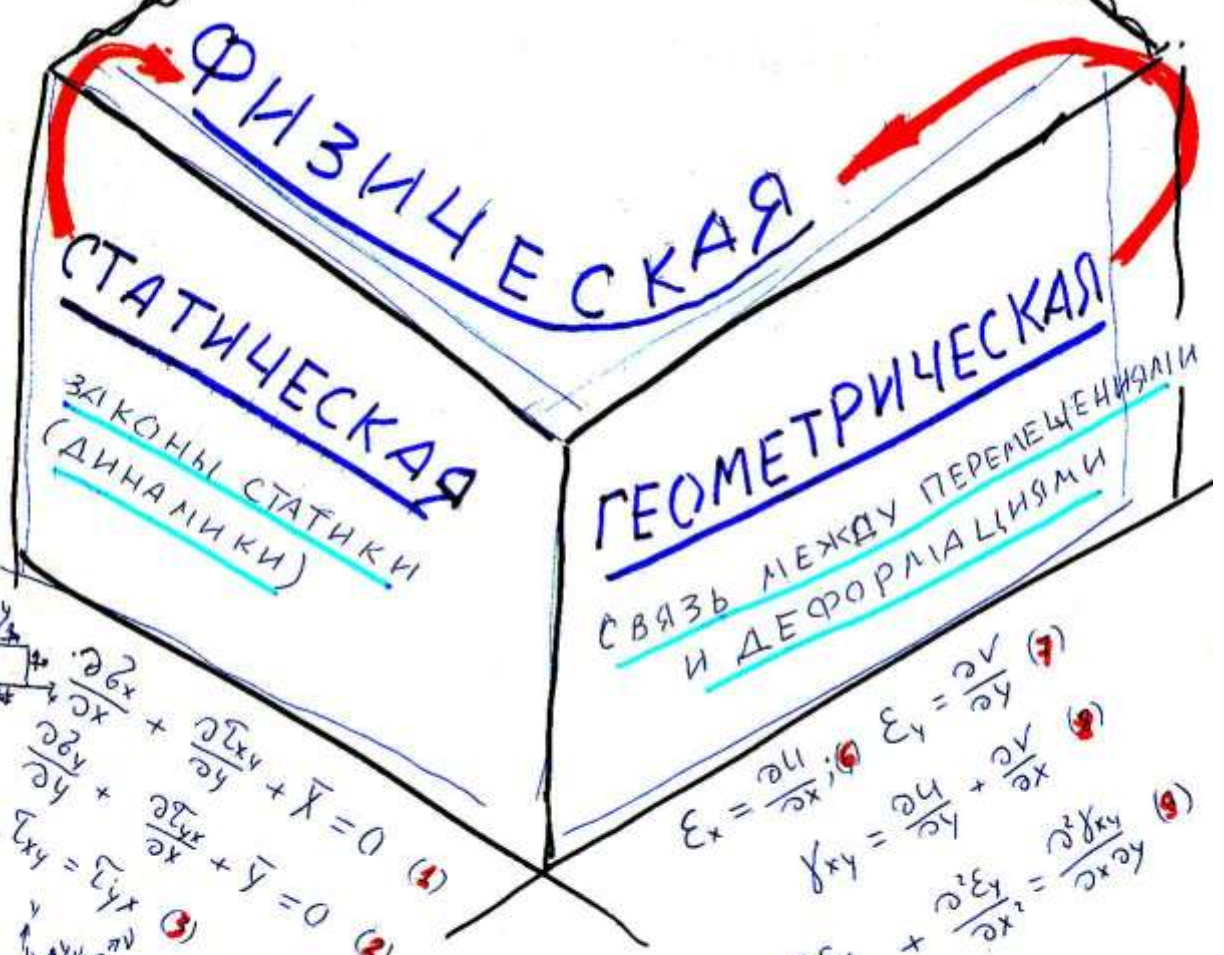
ФОРМУЛЫ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ



$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y) \quad (10) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x) \quad (11) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad (12) \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)} \end{aligned}$$

Обратная формула:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y) \quad (10') \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_y + \mu \epsilon_x) \quad (11') \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} \quad (12') \end{aligned}$$

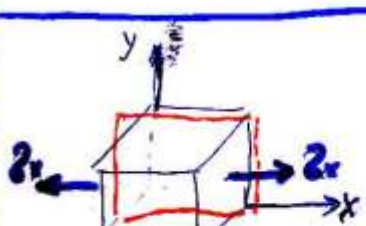
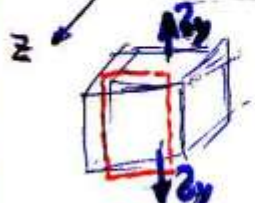


$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{X} &= 0 \quad (1) \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \bar{Y} &= 0 \quad (2) \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} \quad (3) \\ X_0 &= \sigma_x l + \tau_{xy} n \quad (4) \\ Y_0 &= \tau_{xy} l + \sigma_y n \quad (5) \\ l &= \cos(\alpha) \\ n &= \sin(\alpha) \end{aligned}$$

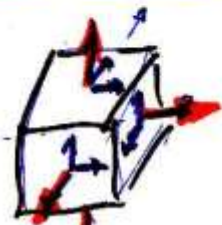
$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (7) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (8) \\ \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (9) \end{aligned}$$

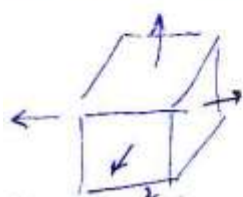
ЗАКОН ГУКА

11

	$\epsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x$
	$\epsilon_x = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$
	$\epsilon_x = -\mu \frac{\sigma_z}{E}$
	$\epsilon_x = 0$

+

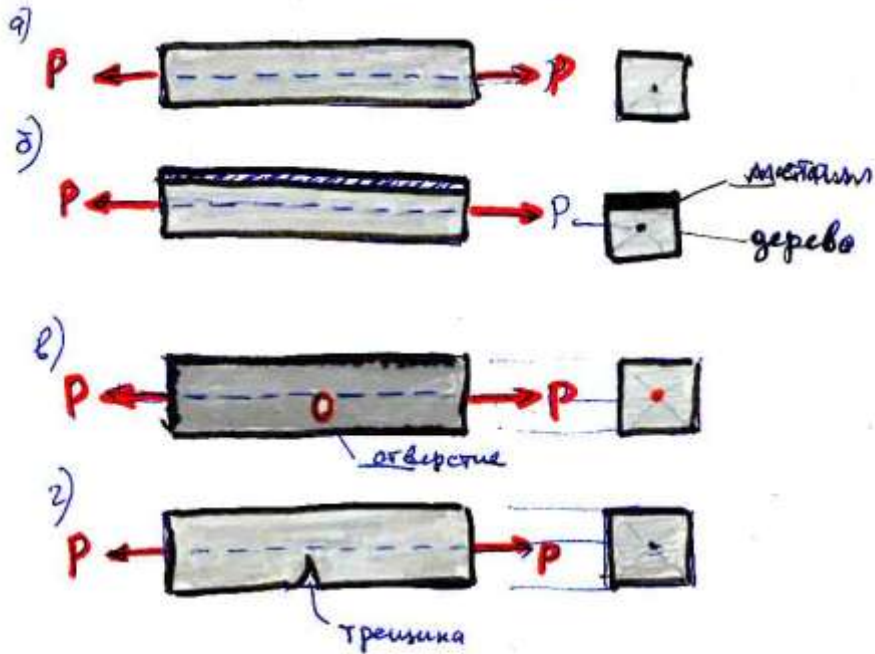
	$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z) \right]$
	$\epsilon_y = \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \mu (\sigma_x + \sigma_z) \right]$
	$\epsilon_z = \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y) \right]$
	$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$



$$\gamma_{xy} = 0 \quad \gamma_{xz} = 0 \quad \gamma_{yz} = 0$$

Вопрос.

Как будет деформироваться брус

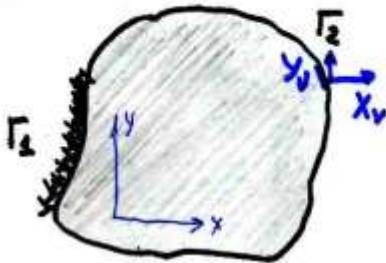


Изотропный материал

Анизотропность создаётся конструктивно (искусственно)

ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТУ

13



На контуре:

$$\Gamma_1 \rightarrow \begin{aligned} u &= u^* \\ v &= v^* \end{aligned}$$

заданы перемещения

$$\Gamma_2 \rightarrow \begin{aligned} x_\nu &= \partial_x \ell + \tau_{xy} n \\ y_\nu &= \partial_y \ell + \tau_{xy} \ell \end{aligned}$$

заданы
компоненты
напряжения

В области:

$$\bar{X} = f(x, y)$$

$$\bar{Y} = f(x, y)$$

заданы
объемные
силы

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{X} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \bar{Y} = 0 \quad (2)$$

общее
решение

$$\begin{aligned} \partial_x &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}; \quad \partial_y = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \bar{X}y - \bar{Y}x \end{aligned}$$

$$\phi(x, y)$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5)$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\partial_x - \mu \partial_y) \quad (6)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\partial_y - \mu \partial_x) \quad (7)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (8), \quad \mu = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

$$\partial_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y) \quad (6')$$

$$\partial_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_y + \mu \epsilon_x) \quad (7')$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} \quad (8')$$

обратная форма

Восемь уравнений — восемь неизвестных

$$\partial_x, \partial_y, \tau_{xy},$$

$$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$$

$$u, v$$

ТЕОРЕМА ОБ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

Решение в перемещениях: $u=?$ $v=?$

Схема вывода (получения) разрешающих уравнений

$$\begin{matrix} (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} (6) \\ (7) \\ (8) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) + \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) + \bar{X} = 0 \\ \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) + \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \bar{Y} = 0 \end{cases}$$

Решение в напряжениях: $\sigma_x=?$ $\sigma_y=?$ $\tau_{xy}=?$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{X} = 0 & (1) \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \bar{Y} = 0 & (2) \\ \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 & (3) \end{cases}, \text{ где } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Решение с помощью $\varphi(x, y)$

Используем общее решение (1)-(2)

которое подставляем в (3):

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi(x, y) = 0$$

при $\bar{X} = \bar{Y} = \text{const.}$

или
$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$$

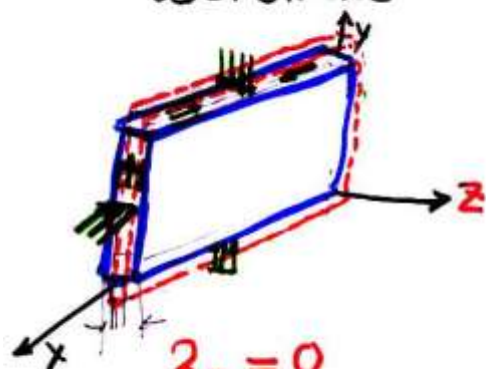
Бигармоническое уравнение

$\varphi(x, y)$

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА

15

ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ



$$\sigma_z = 0$$

$$\varepsilon_z \neq 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y)$$

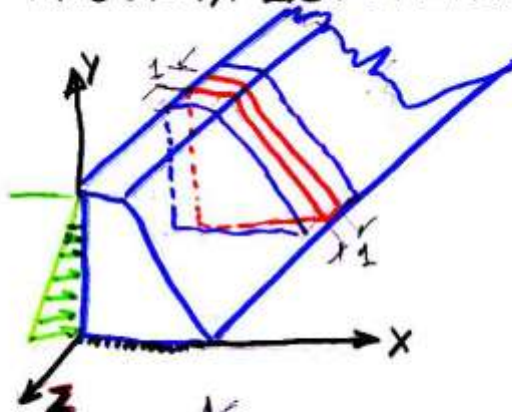
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

E

μ

ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ



$$\varepsilon_z = 0$$

$$\sigma_z \neq 0$$

$$\sigma_z = \mu (\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\bar{E}} (\sigma_x - \bar{\mu} \sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{\bar{E}} (\sigma_y - \bar{\mu} \sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

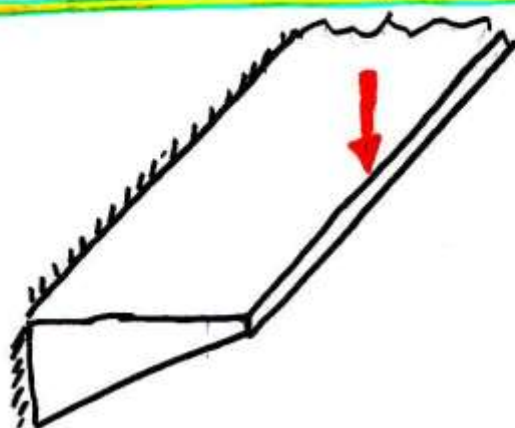
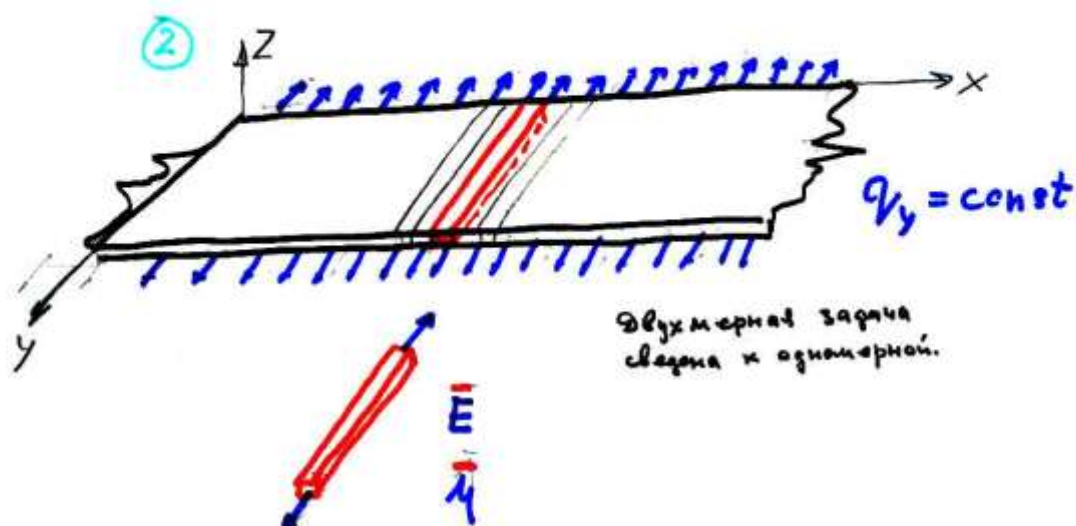
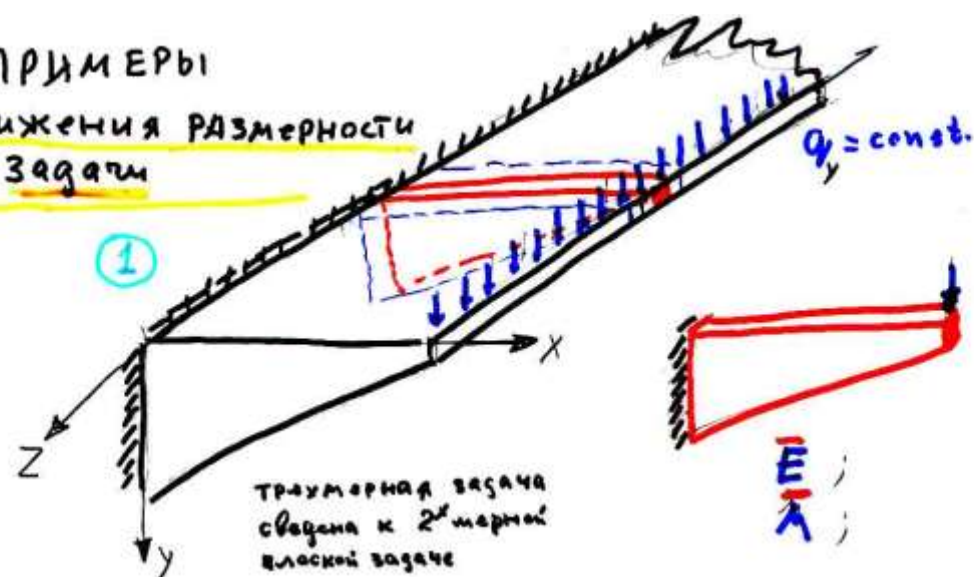
$\bar{E}$

$\bar{\mu}$

$$\bar{E} = \frac{E}{1 - \mu^2} \rightarrow E$$

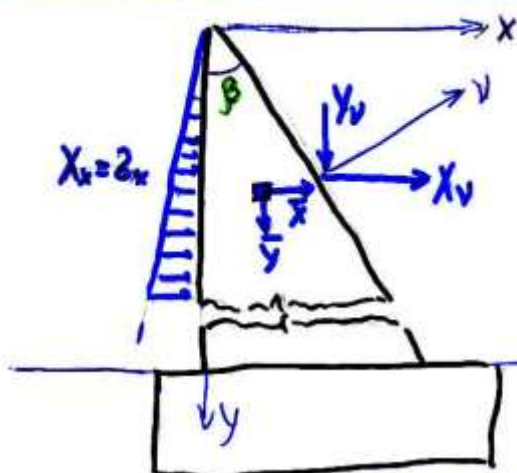
$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{1 - \mu}$$

ПРИМЕРЫ СНИЖЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ ЗАДАЧ



Можно ли в таком
случае снизить размерность
задачи, т.е. упростить её?

РАСЧЕТ ГРАВИТАЦИОННОЙ ПЛОТИНЫ ТРЕУГОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ (ВЕРХНЕЙ ЧАСТИ)



Граничные условия:

при $x=0$: 1) $X_x = Z_x = -\gamma \cdot y$

2) $Y_x = T_{xy} = 0$

при $x = y \tan \beta$; ($\ell = \cos \beta$; $n = -\sin \beta$)

3) $X_v = 0 \rightarrow X_v = Z_x \cos \beta + T_{xy}(-\sin \beta) = 0$

4) $Y_v = 0 \rightarrow Y_v = Z_y(-\sin \beta) + T_{xy} \cos \beta = 0$

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi(x, y) = 0$$

$$Z_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad Z_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad T_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \bar{X}y - \bar{Y}x.$$

$$\bar{X}=0; \bar{Y}=q$$

ИДС плотины: изгиб + внецентренное сжатие-растяжение

Задаемся: $\varphi = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$

Находим: $Z_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2cx + 6dy$

$$Z_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 6ax + 2by$$

$$T_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -2bx - 2cy - qx$$

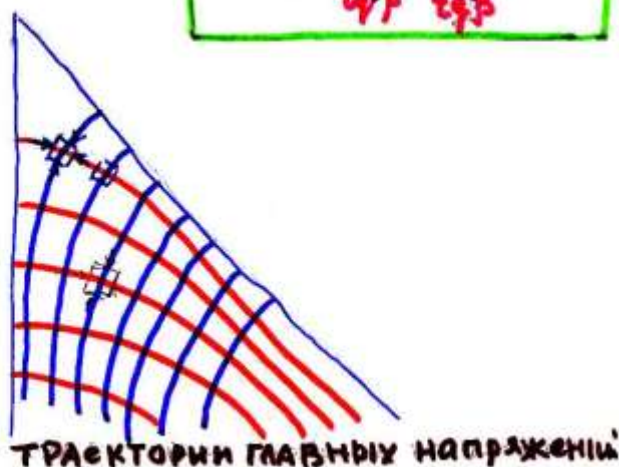
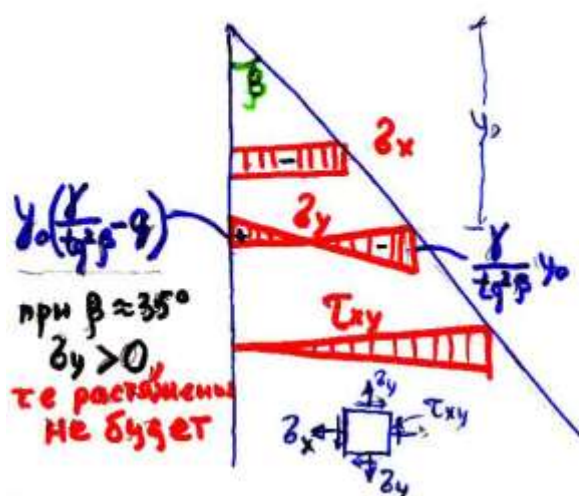
Из условий 1-4 находим:

$$6d = -\gamma$$

$$c = 0$$

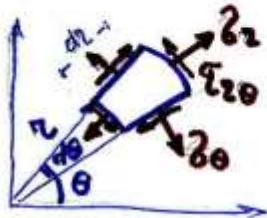
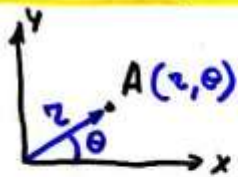
$$2b = \frac{\gamma}{\tan^2 \beta} - q$$

$$6a = -\frac{2\gamma}{\tan^3 \beta} + \frac{q}{\tan \beta}$$



ТРАЕКТОРИИ ГЛАВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТУ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ 18



пример. Толстостенная труба



НАГРУЗКА
НЕ ЗАВИСИТ ОТ θ

Плоская деформация



НДС не зависят
от θ :
 $\tau_{r\theta} = 0$
 $\gamma_{r\theta} = 0$

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА

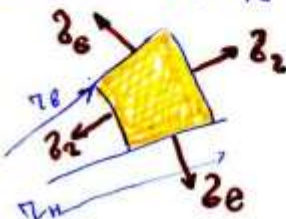
$$\sigma_r = C_1 - \frac{1}{r^2} C_2$$

$$\sigma_\theta = C_1 + \frac{1}{r^2} C_2$$

Граничные условия:

при $r = r_0 \rightarrow \sigma_r = q_1$

при $r = r_n \rightarrow \sigma_r = q_2$



Статические уравнения

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2 \tau_{r\theta}}{r} = 0$$

Геометрические уравнения

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r}$$

Физические уравнения

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{G} \tau_{r\theta}$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_r + \nu \epsilon_\theta)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_r)$$

$$\tau_{r\theta} = G \gamma_{r\theta}$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi(r, \theta) = 0$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}$$

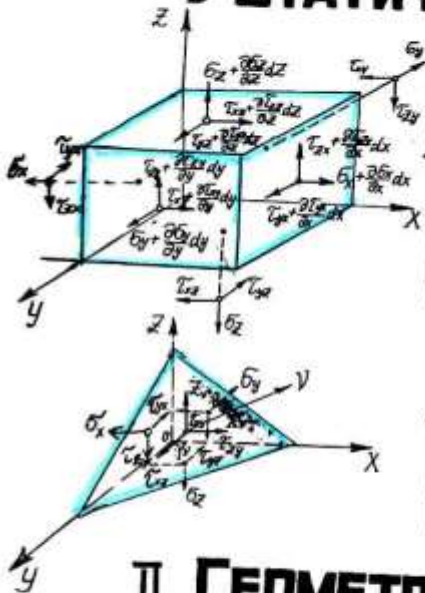
$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)$$

Сводка формул

19

ПРОСТРАНСТВЕННОЙ теории упругости

I СТАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ



$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{cases}$$

УРАВНЕНИЯ
РАВНОВЕСИЯ
ЭЛЕМЕНТА

$$\begin{cases} X_v = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n \\ Y_v = \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n \\ Z_v = \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n \end{cases}$$

УСЛОВИЯ
НА
ПОВЕРХНОСТИ

II. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}$$

СООТНОШЕНИЯ
ПОД
ПОД

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y}; \end{aligned}$$

УРАВНЕНИЯ
НЕРАЗРЫВНОСТИ
ДЕФОРМАЦИИ

ФИЗИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] / E; \quad \gamma_{xy} = \tau_{xy} / G; \\ \epsilon_y &= [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] / E; \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz} / G; \\ \epsilon_z &= [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] / E; \quad \gamma_{zx} = \tau_{zx} / G; \end{aligned}$$

В
ПРЯМОЙ
ФОРМЕ

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \theta + 2G \epsilon_x; \\ \sigma_y &= \lambda \theta + 2G \epsilon_y; \\ \sigma_z &= \lambda \theta + 2G \epsilon_z; \end{aligned}$$

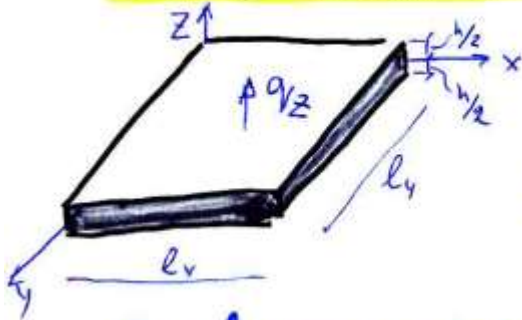
$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}; \\ \tau_{yz} &= G \gamma_{yz}; \\ \tau_{zx} &= G \gamma_{zx}; \end{aligned}$$

В
ОБРАТНОЙ
ФОРМЕ

$$\begin{aligned} \lambda &= E\mu / [(1+\mu)(1-2\mu)]; \\ \theta &= \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \end{aligned}$$

ЗАКОН
ГУКА

Поперечный изгиб тонких плит



$\frac{h}{e} > \frac{1}{5}$ толстые плиты
 $\frac{1}{100} < \frac{h}{e} < \frac{1}{5}$ тонкие плиты
 $\frac{h}{e} \ll \frac{1}{100}$ мембраны

Основные гипотезы

• ненадавливания волокан	$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$	$w = f(x, y)$
• прямой нормали к изогнутой срединной поверхности	$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ $\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$	$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + C_1(x, y)$ $v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + C_2(x, y)$
• недеформируемости срединной поверхности	при $z=0$: $u=v=0$	$C_1=0; C_2=0.$

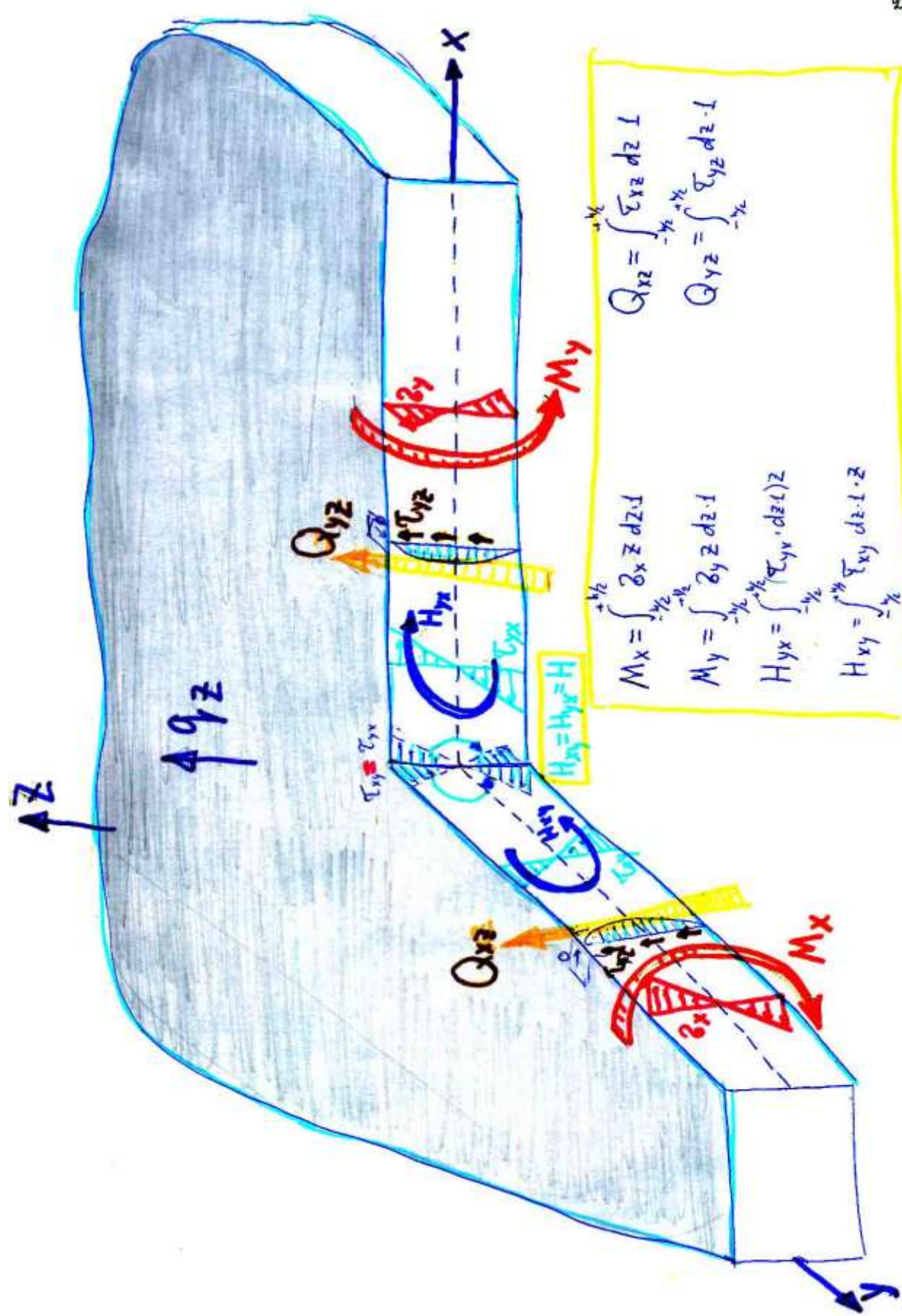
$$w(x, y); \quad u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_z(x, y)}{D}, \quad D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}$$

или

$$\nabla^2 \nabla^2 w(x, y) = \frac{q_z(x, y)}{D}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$



$$Q_{xz} = \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_{xz} dz$$

$$Q_{yz} = \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_{yz} dz$$

$$M_x = \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_x z dz$$

$$M_y = \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_y z dz$$

$$H_{yx} = \int_{-b/2}^{b/2} (\tau_{yx} \cdot dz) \cdot z$$

$$H_{xy} = \int_{-b/2}^{b/2} \tau_{xy} dz \cdot z$$

$$H_{xy} = H_{yx} = H$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ

$$W(x, y)$$

$$u = -2 \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$v = -2 \frac{\partial W}{\partial y}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

$$\varepsilon_z = 0 \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

ФИЗИЧЕСКИЕ

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)$$

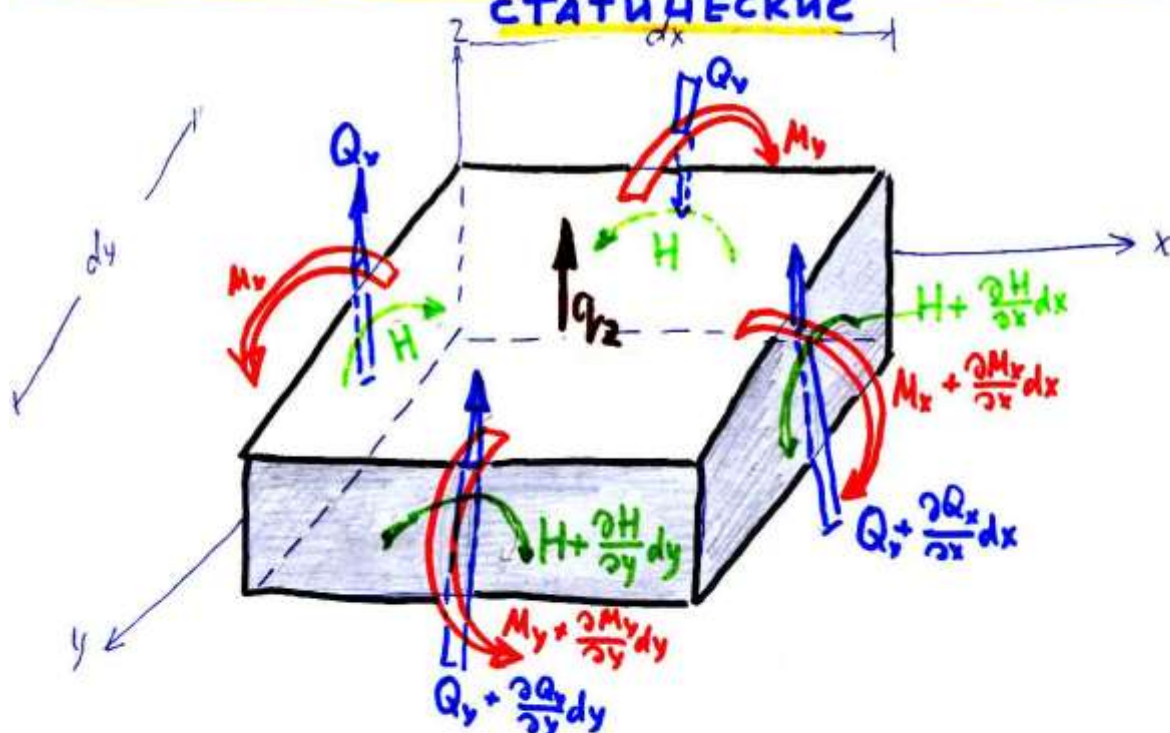
$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

$$\tau_{xz} \neq 0$$

$$\tau_{yz} \neq 0$$

} находят из условий
равновесия

$$\sigma_z \approx 0$$

СТАТИЧЕСКИЕ

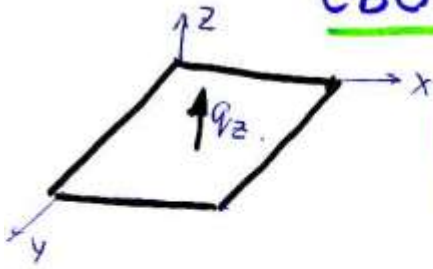
$$\frac{\partial M_y}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_x$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} = Q_y$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q_z(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q_z(x, y)$$

СВОДКА ФОРМУЛ



$$\nabla^2 \nabla^2 W(x, y) = \frac{q_z(x, y)}{D}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Софн Жермен

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)$$

$$H = -(1-\nu) D \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\phi_x = \frac{M_x \cdot z}{J}$$

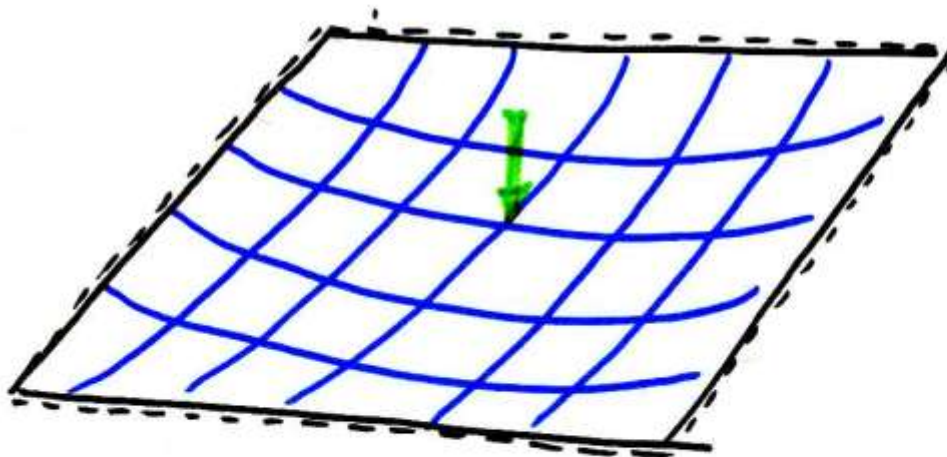
$$\phi_y = \frac{M_y \cdot z}{J}$$

$$\tau_{xy} = \frac{H \cdot z}{J}$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q_x \cdot S}{J}$$

$$\tau_{yz} = \frac{Q_y \cdot S}{J}$$

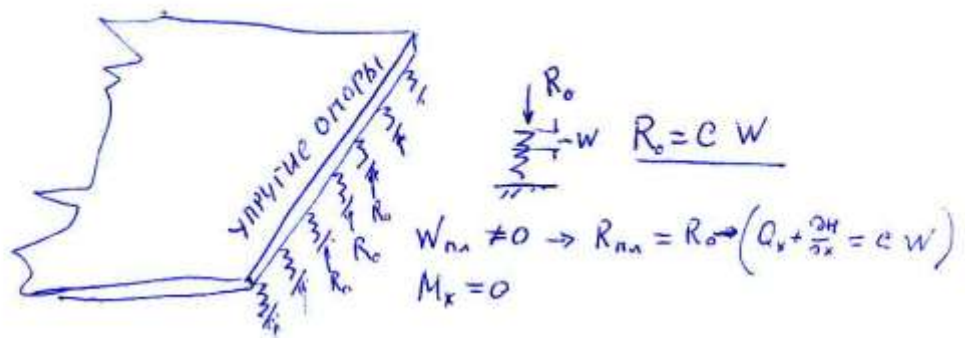
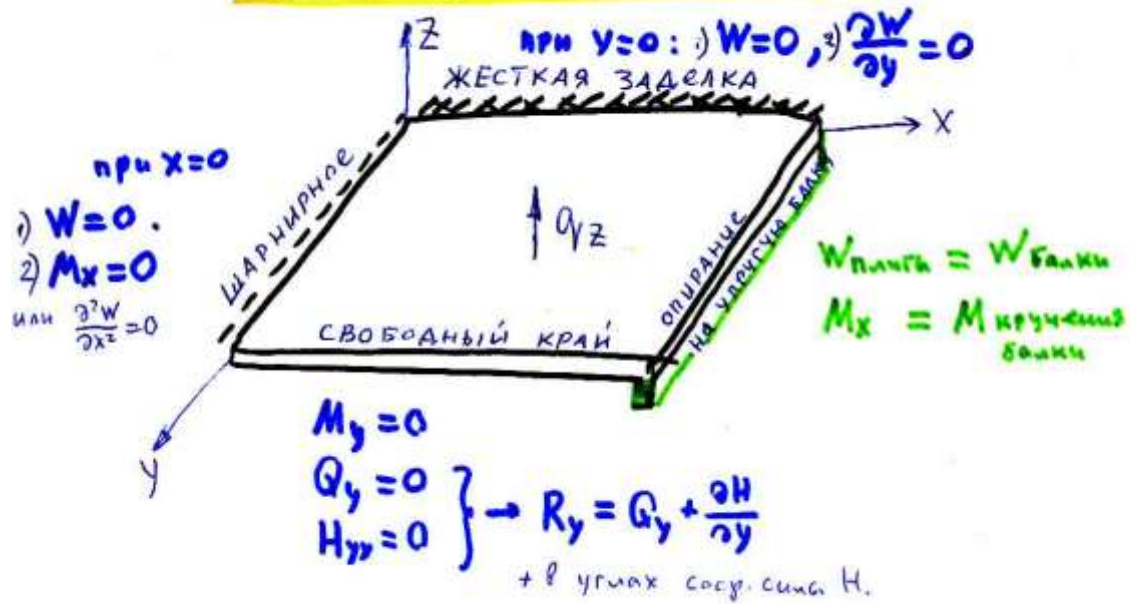
$$J = \frac{1 \cdot h^3}{12}$$



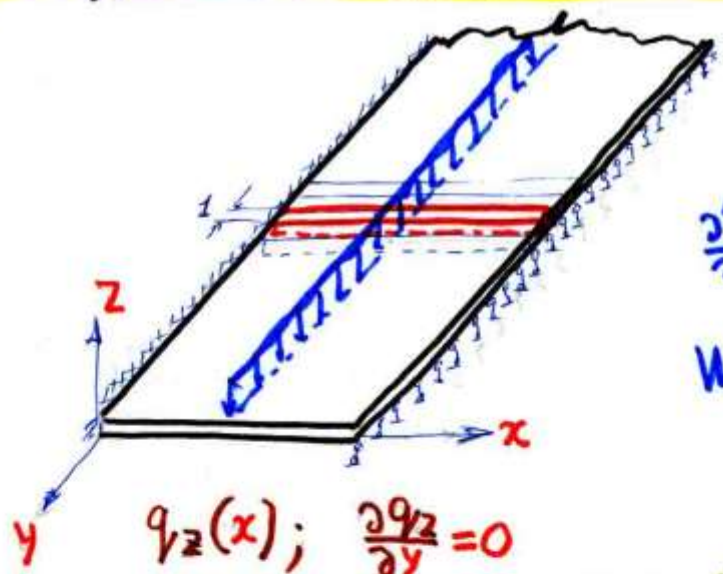
ПРОСТРАНСТВЕННАЯ РАБОТА ПЛИТЫ:

ИЗГИБ В ДВУХ НАПРАВЛЕНИЯХ С КРУЧЕНИЕМ

Условия закрепления



Цилиндрический изгиб тонкой плиты



$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q_z}{D}$$

$$W(x); \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0$$

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}$$

$$q_z(x); \quad \frac{\partial q_z}{\partial y} = 0$$

Нагрузка q_z и прогибы W не зависят от y .



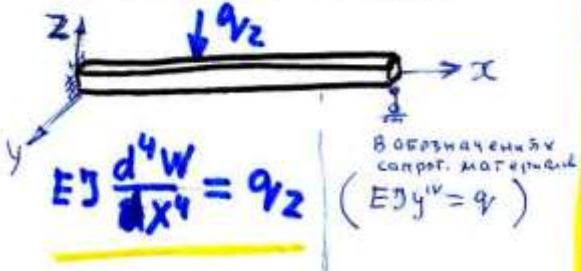
$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = \frac{q(x)}{D}$$

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)$$

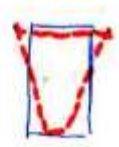
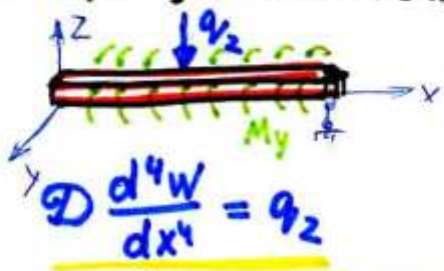
$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \neq 0$$

Сравнение НДС

отдельная балка



„балка“, выделенная из плиты



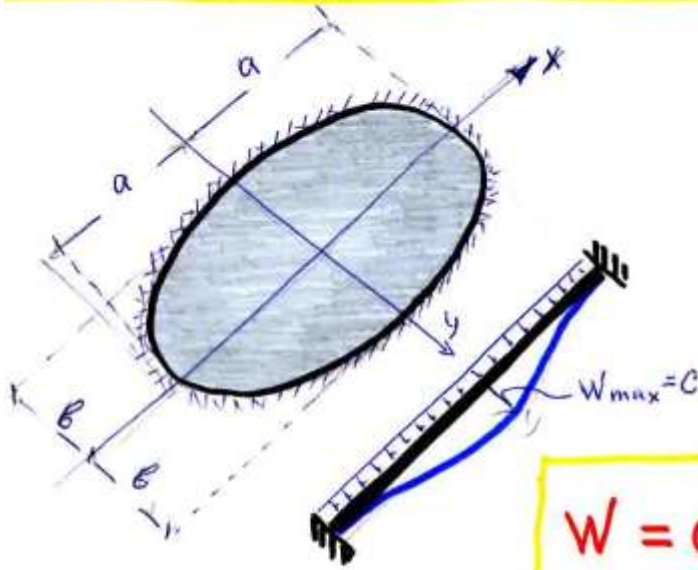
деформации поперечных сечений балки



$$E J < D$$

прогибы **МЕНЬШЕ** чем в отдельной балке

Эллиптическая пластинка, заделанная по контуру



Уравнение контура

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\nabla^2 \nabla^2 W(x, y) = \frac{q_2}{D}$$

$$W = C \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2$$

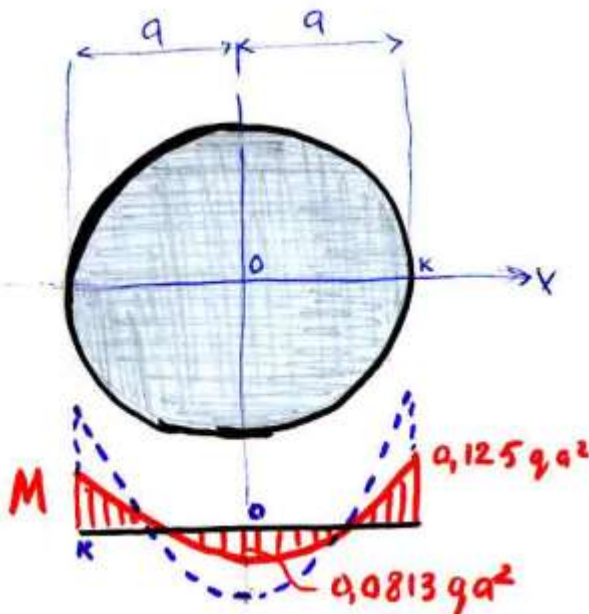
$$C = \frac{q}{D \left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right)}$$

Условия на контуре:

$$W = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial n} = 0 \quad \left(\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \right)$$

Круглая плита (или $a = b$)

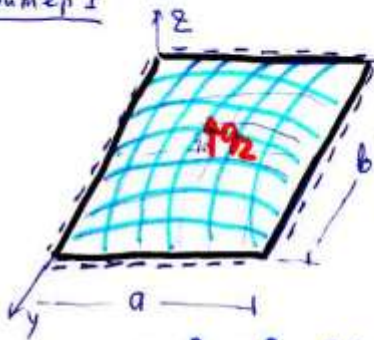


для плиты	для балки - полоски $l = 2a$
при $\mu = 0,3$	
$W_{max} = 0,17 \frac{qa^4}{Eh^3}$	$W_{max} = 0,5 \frac{qa^4}{Eh^3}$
$M_0 = 0,0813 qa^2$	$M_0 = 0,167 qa^2$
$M_K = -0,125 qa^2$	$M_K = -0,334 qa^2$

Шарнирно опертая прямоугольная плита.

Решение Навье.

Пример 1



Нагрузка

$$q_z = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

Условия опоры:

при $x=0, a$; $W=0$, $M_x=0$ ($\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0$)

$y=0, b$; $W=0$, $M_y=0$ ($\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=0$)

$$\nabla^2 \nabla^2 W(x, y) = \frac{q_z}{D}$$

$$W(x, y) = A \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$A = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}$$

Пример 2.

НАГРУЗКА

$q_z(x, y)$ — произвольного вида

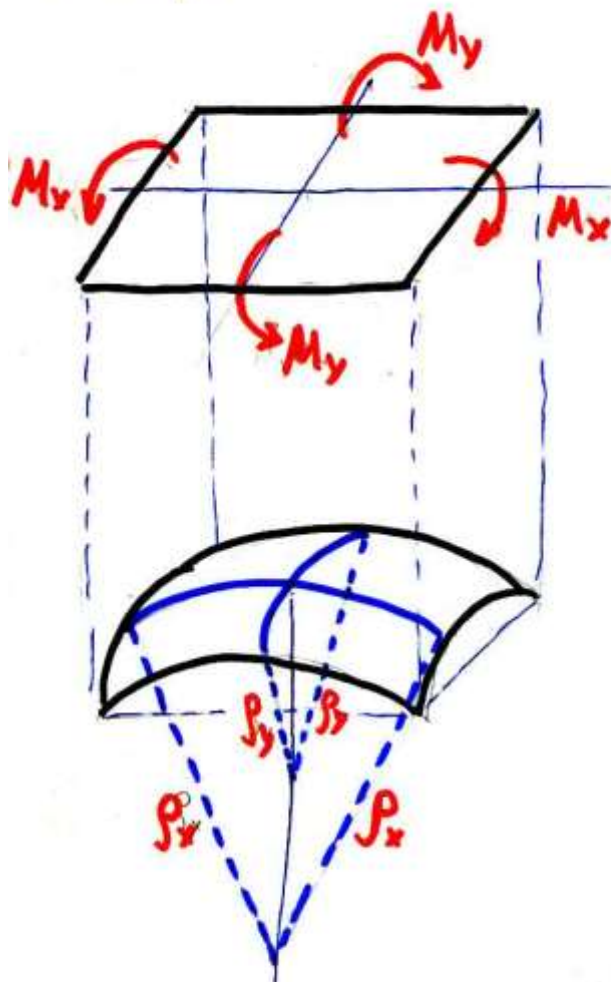
$$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

$$A_{mn} = \frac{4}{ab\pi^4 D \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)^2} \int_0^a \int_0^b q_z(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} dx dy$$

при $q_z = \text{const}$

$$W(x, y) = \frac{16q}{\pi^6 D} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

Пример



$$\frac{1}{\rho_x} \approx \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

$$\frac{1}{\rho_y} \approx \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$$

$$W = ax^2 + by^2$$

$$\nabla^2 \nabla^2 W = \frac{q_z}{D}$$

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

$$M_x = -D(2a + \mu 2b)$$

$$M_y = -D(2b + \mu 2a)$$

$$H = -(1-\mu) D \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y) = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{1}{\rho_x} + \mu \frac{1}{\rho_y} \right)$$

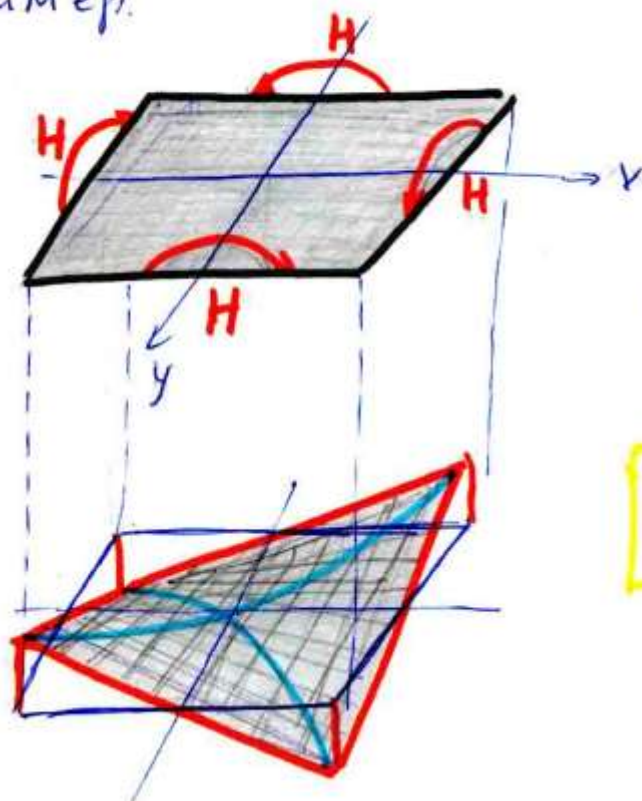
$$\sigma_y = \frac{Ez}{1-\mu^2} (\epsilon_y + \mu \epsilon_x) =$$

$$\sigma_x = \frac{M_x z}{J}$$

$$J = \frac{bh^3}{12}$$

$$\sigma_y = \frac{M_y z}{J}$$

Пример.



$$W = Kxy$$

$$\nabla^2 \nabla^2 W = \frac{q}{D}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$$

$$M_x = 0$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$$

$$M_y = 0$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = K \quad H = \text{const}$$

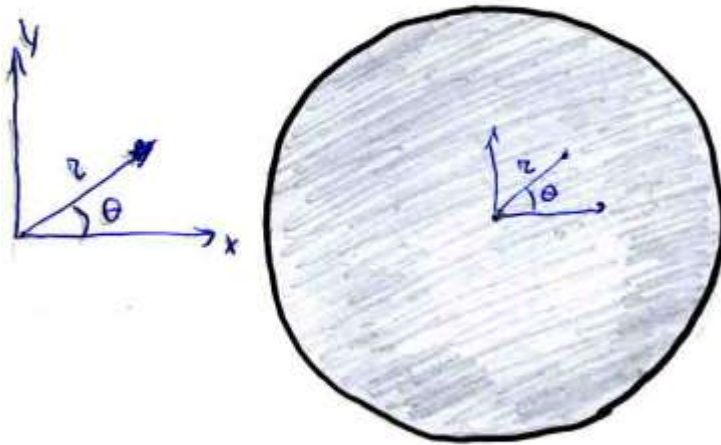
$$\frac{1}{\rho_{xy}} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = K$$

кривизна кручения

поверхности оболочки — ГИПАРА

гиперболического
параболоида

Круглая пластинка. Изгиб



общий случай

$$\nabla^2 \nabla^2 W(r, \theta) = q_2(r, \theta)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$M_r = -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right]$$

$$M_\theta = -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right]$$

$$H = -D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)$$

Осесимметричный случай изгиба:
Нагрузка и прогибы не зависят от θ ,

т.е. $\frac{\partial W}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial q_2}{\partial \theta} = 0$.

Получим:

$$D \left(\frac{d^4 W}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 W}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dW}{dr} \right) = q_2(r)$$

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dW}{dr} \right)$$

$$M_\theta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dW}{dr} + \nu \frac{d^2 W}{dr^2} \right)$$

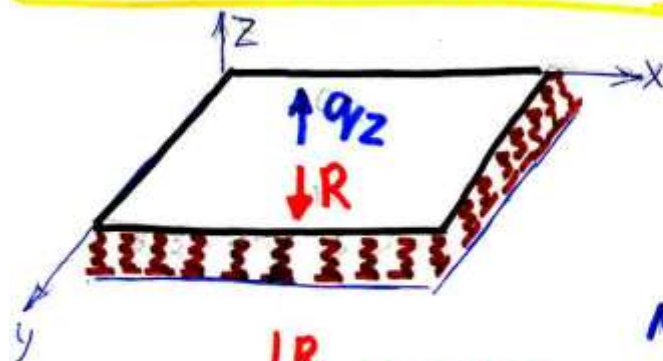
$$H = 0$$

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} (M_r)$$

$$Q_\theta = 0$$

Вместо $\frac{\partial \dots}{\partial r} = \frac{d \dots}{dr}$

ПЛИТА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ



$$R = kW$$

$\left[\frac{\text{кгс}}{\text{см}^2} \right] \quad \left[\text{см} \right]$

МОДЕЛЬ ОСНОВАНИЯ ПО ВИНКЛЕРУ

(по коэффициенту пропорциональности реакции основания — прогибу)

$$[K] = \frac{\text{кгс}}{\text{см}^3}$$

$$\nabla^2 \nabla^2 W(x, y) = q_z - R(x, y) = q_z - kW$$

$$\nabla^2 \nabla^2 W + kW = q_z$$

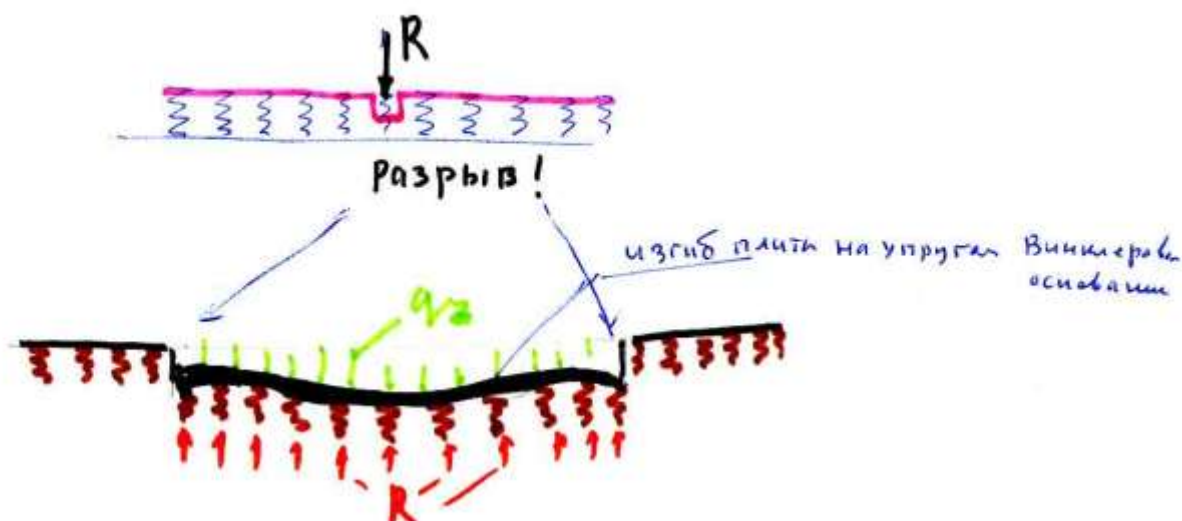
НДС плиты на упругом основании существует и зависит от соотношения

$$\frac{q}{K \cdot l}$$

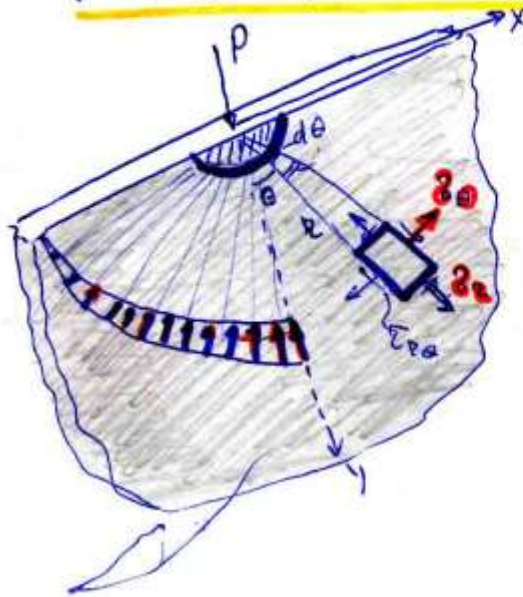
l — характерный размер (длина) плиты

Модель Винклера — несплошное (несвязное)

в отличие от модели упругого полупространства



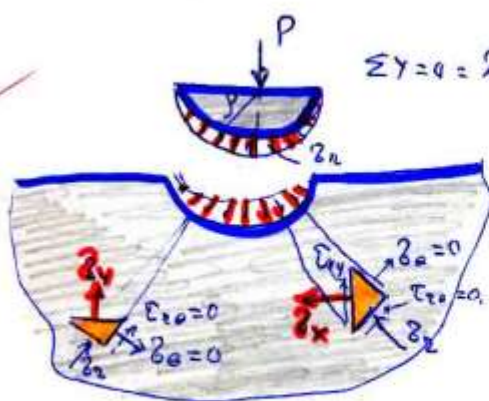
УПРУГАЯ ПОЛУПЛОСКОСТЬ



$$\sigma_r = -\frac{K}{r} \cos \theta$$

$$\sigma_\theta = 0$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

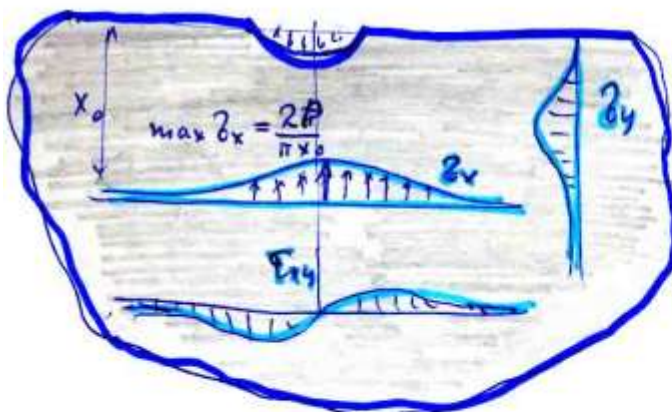


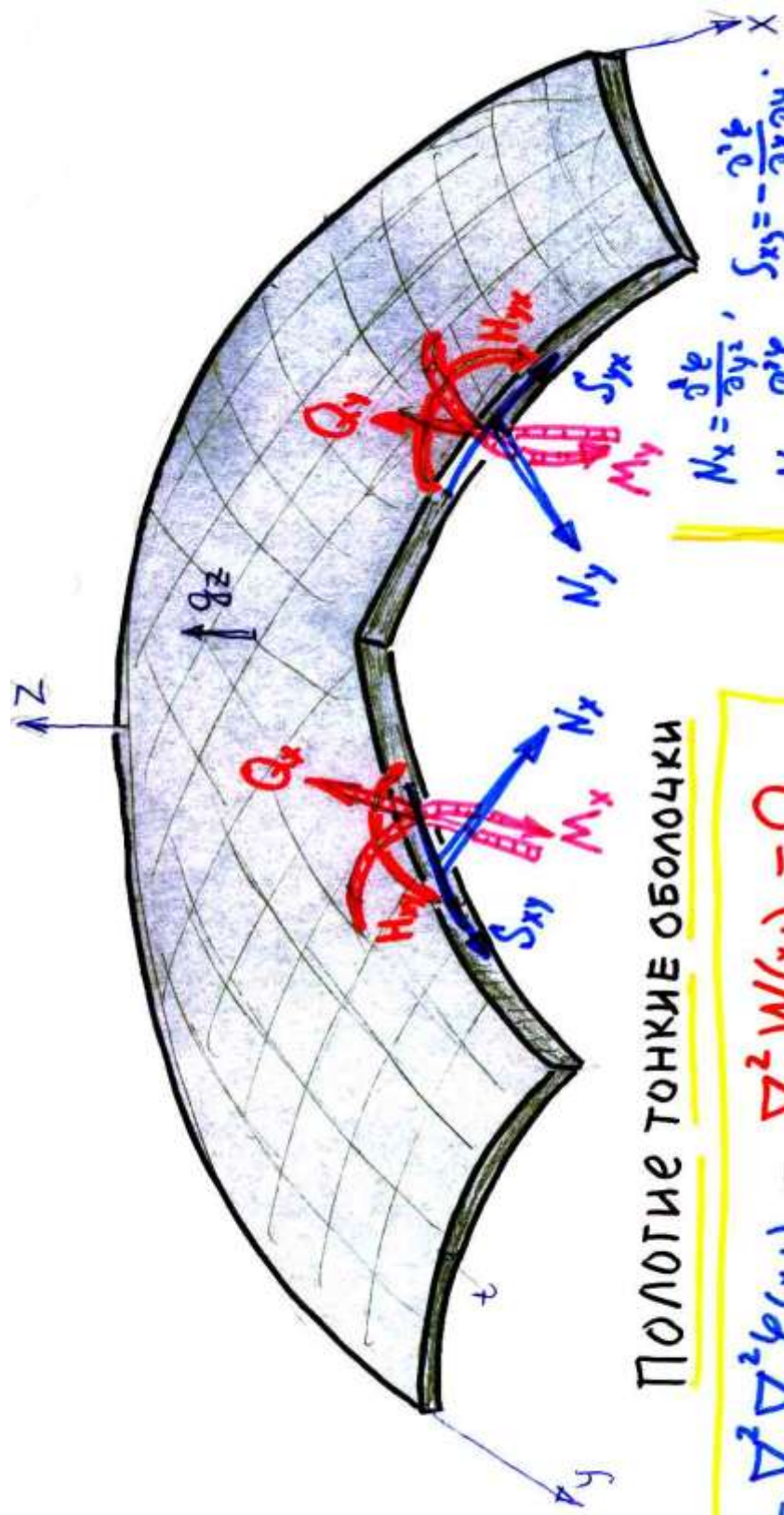
$$\sum Y = 0 = 2 \int_0^{\pi/2} \sigma_r \cdot r d\theta \cos \theta = P$$

$$\sigma_r = -\frac{K}{r} \cos \theta$$

$$K = \frac{2P}{\pi}$$

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi r} \cos \theta$$





ПЛОТНЫЕ ТОНКИЕ ОБЛОЧКИ

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{E t} \nabla^2 \Delta^2 \varphi(x, y) - \nabla_K^2 W(x, y) &= 0 \\ \nabla_K^2 \varphi(x, y) + 2 \nabla^2 \Delta^2 W(x, y) &= q_z \end{aligned} \right.$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla_K^2 = K_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_x \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2 K_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial y^2}, & S_{xy} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x \partial y}, \\ N_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}, & S_{yx} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x \partial y}, \\ M_x &= -2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right), \\ H_{xy} &= -(1-\gamma) 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

НДС ^{тонких} оболочек содержит

изгибное (как в тонкой плите) - M_x, M_y, H, Q_x, Q_y

и мембранное (как в плоской задаче) - N_x, N_y, S

состояния. Их расчет сводится к решению системы из двух уравнений с искомыми $W(\eta)$ и $\varphi(\eta)$.

Аналогом в стержневой системе может служить полая арка, в которой возникают изгибающие моменты M и продольные силы N .

Эффективной конструкцией является арка с рациональной осью, в которой $M=0$.

Аналогично можно выбрать рациональную форму полой оболочки, в которой изгибное состояние будет незначительным. Эти оболочки называют безмоментными. Их решение сводится к одному уравнению.

В безмоментных сферических и цилиндрических оболочках в основном есть N_x, N_y , в гипарах - S_{xz} .

Задача инженера - выбрать рациональную форму оболочки и тем самым **управлять НДС**.

Понятие о **ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПАХ** ТУ ³⁵

принцип возможных перемещений Лагранжа

$$(\Pi - A) \rightarrow \min$$

$$\delta(\Pi - A) = 0$$

Если система находится в равновесии, то сумма работ внешних и внутренних сил на любых возможных бесконечно малых перемещениях равна нулю.

или: если $\delta(\Pi - A) = 0$, то система находится в равновесии.

Возможные перемещения — те, которые не нарушают внутренних и внешних связей системы.

Для плоской задачи ТУ:

$$\begin{aligned} \delta(\Pi - A) = & \iint_{\omega} (\partial_x \delta \epsilon_x + \partial_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) d\omega - \\ & - \iint_{\omega} (\bar{x} \delta u + \bar{y} \delta v) d\omega - \int_{\Gamma_1} (x_v \delta u + y_v \delta v) d\Gamma_1 = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \delta(\Pi - A) = & \iint_{\omega} \left\{ \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{x} \right] \delta u + \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{y} \right] \delta v \right\} d\omega - \\ & - \int_{\Gamma_1} \left\{ [x_v - (\partial_x \ell + \tau_{xy} n)] \delta u + [y_v - (\partial_y \ell + \tau_{xy} e)] \delta v \right\} d\Gamma_1 = 0 \end{aligned}$$

Отсюда следуют уравнения равновесия как условия стационарности (уравнения Эйлера), если вариации $\delta u, \delta v$ независимы.

$$\begin{aligned} \Theta = \Pi - A = & \iint_{\omega} \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu \sigma_x \sigma_y + 2(1+\mu) \tau_{xy}^2] d\omega - \\ & - \iint_{\omega} (\bar{x} \cdot u + \bar{y} \cdot v) d\omega - \int_{\Gamma_1} (x_v u + y_v v) d\Gamma_1 \end{aligned}$$

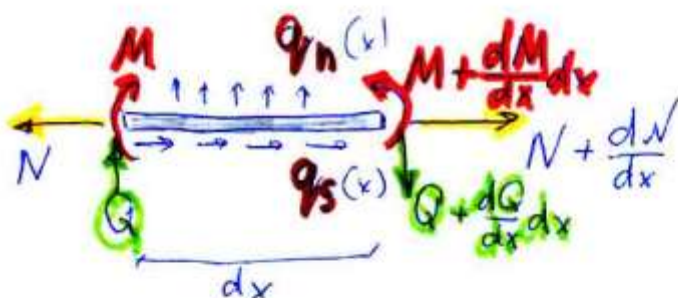
Вариационный принцип Лагранжа для изгиба тонких плит

$$\delta \mathcal{E} = \iint_{\omega} \left[\mathcal{D} \nabla^2 \nabla^2 W(x, y) - q_z \right] dx dy \delta W - \\ - \int_{\Gamma_1} \left[R_\nu \delta W + M_\nu \delta \left(\frac{\partial W}{\partial \nu} \right) \right] d\Gamma_1 = 0$$

При независимых возмущениях вариаций δW получаем уравнения равновесия в области (уравнение Сопри Жерлен) и на контуре Γ_1 .

Методы расчета Бубнова - Галеркина и Ритца - Тимошенко основаны на вариационном принципе.

Дифференциальные зависимости для БАЛКИ



$$q_n = \frac{dQ}{dx}$$

$$Q = \frac{dM}{dx}$$

$$q_n = \frac{d^2M}{dx^2}$$

$$q_s = -\frac{dN}{dx}$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что общего и различного в задачах теории упругости и сопротивления материалов?
2. Задачи ТУ описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, а задачи сопротивления материалов - обыкновенными дифференциальными уравнениями. В чем причина?
3. Гипотезы ТУ и гипотезы сопротивления материалов. Что в них общего и в чем принципиальное отличие?
4. Охарактеризуйте модель тела в ТУ.
5. Встречаются ли в ТУ, как частный случай, статически определимые задачи? Приведите пример.
6. Приведите пример деформации упругого тела, при которых
 - 1) $\xi_x = \xi_y = 0, \gamma_{xy} \neq 0$
 - 2) $\xi_x \neq 0, \xi_y \neq 0, \gamma_{xy} = 0$
7. Какими физическими коэффициентами (модулями) характеризуется идеально упругое изотропное тело? Сколько из них независимых?
8. То же для анизотропного упругого тела?
9. Опишите опыт (эксперимент) для определения модулей E , ν и коэффициента Пуассона μ . Укажите размерности этих величин.
10. Объясните, почему модуль упругости $\bar{E}$ в условиях плоской деформации больше, чем E в условиях плоского напряженного состояния ($\bar{E} > E$).
11. Можно ли в общем случае признать верное решение задачи теории упругости, если какая-либо из трех групп уравнений (статическая, геометрическая, физическая) не использованы? Почему?
12. Почему при решении плоской задачи ТУ в перемещениях (U, v) не используется уравнение сплошности (неразрывности)?
13. Если плоская задача ТУ решается с помощью функций напряжений $\xi(x, y)$, то является ли достаточной проверка равновесия любой отсеченной части?
14. Какие напряжения называются главными? Как они и их траектории используются, например, при армировании железобетонной балки?
15. Опишите отличия в физических картинках разрушения бетонного кубика при осевом сжатии в случаях, когда между контактирующей поверхностями пресса и кубика есть трение и когда трения практически нет.
16. Какую картинку физического деформируемого упругого тела гарантирует выполнение уравнения сплошности (неразрывности)? Как это связано с гипотезами теории упругости?
17. К решению каких уравнений сводится плоская задача теории упругости, если ее решать в напряжениях (с помощью функции ξ)?
18. То же в перемещениях?
19. Каким разрешающим уравнением описывается поперечный изгиб тонкой плиты?

20. То же если плиты лежат на упругом основании по модели Винклера?